

UTDT - Segundo Semestre de 2025

Microeconomía

Primer Examen: 13/10/2025

Tiempo disponible: 2 horas.

1. [45 puntos] *Teoría de la Firma*

Considere una empresa tomadora de precios que opera la siguiente tecnología de producción:

$$F(K,L) = \ln \left(1 + K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \right)$$

con $K \geq 0$ y $L \geq 0$. Consideramos una situación de largo plazo, de manera que la empresa puede elegir las cantidades de los dos insumos. El precio del bien final es $p > 0$ y los precios de los factores son $w = r = 1$.

- Demuestre que los dos factores de producción son esenciales (basta que uno de los factores sea cero para que la producción también sea cero).
- Compute la productividad marginal de cada factor: $F_K(K,L)$, $F_L(K,L)$. Argumente que, para cantidades estrictamente positivas de ambos factores, las productividades marginales son positivas ($F_K > 0$, $F_L > 0$) y decrecientes (no es necesario calcular las derivadas de segundo orden, alcanza con un argumento del tipo: $\uparrow K \Rightarrow \downarrow F_K$, $\uparrow L \Rightarrow \downarrow F_L$).
- Considere el problema de maximización del beneficio, donde ya hemos impuesto $w = r = 1$:

$$\begin{aligned} \max_{Y,K,L} \quad & pY - K - L \\ \text{s. a} \quad & Y = \ln \left(1 + K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \right) \\ & K \geq 0, L \geq 0 \end{aligned}$$

- Demuestre que las demandas (marshallianas) de factores son:

$$K^d(p) = L^d(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \leq 2 \\ \frac{p}{2} - 1 & \text{si } p > 2 \end{cases}$$

Ayuda: utilice la restricción para eliminar Y de la función objetivo.

- Obtenga la oferta del bien final, $Y^s(p)$. Gráfiquela (aproximadamente), con Y en el eje horizontal y p en el eje vertical.
 - Calcule la función de beneficio máximo, $\Pi(p)$.
 - Verifique que se cumple el Lema de Hotelling.
- Considere el problema de minimización de costos, donde ya hemos impuesto $w = r = 1$:

$$\begin{aligned} \min_{K,L} \quad & K + L \\ \text{s. a} \quad & \ln \left(1 + K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \right) = Y \end{aligned}$$

con $Y \geq 0$ dada.¹

- Demuestre que las demandas condicionales de factores son: $K^c(Y) = L^c(Y) = e^Y - 1 \forall Y \geq 0$.
- Obtenga la función de costo total $C(Y)$. Represéntela gráficamente (de manera aproximada).
- Obtenga las funciones de costo medio $CMe(Y)$ y costo marginal $CMg(Y)$.
- Argumente que $CMe(Y)$ es creciente en Y . ¿Qué le dice este resultado sobre la forma de la curva de costo medio?
- Teniendo en cuenta su respuesta anterior, ¿qué puede decir sobre los rendimientos a escala de la tecnología de producción?

¹ Como los factores de producción son esenciales, no necesitamos incorporar las restricciones de no negatividad sobre los factores.

e) Considere el problema de maximización del beneficio

$$\max_Y pY - C(Y)$$

$$\text{s. a } Y \geq 0$$

donde $C(Y)$ es la función de costo total encontrada previamente.

- 1) Encuentre la función de oferta $Y^s(p)$. Confirme que coincide con la encontrada en el inciso (c).
Ayuda: recuerde que $\ln(x) > 0$ requiere $x > 1$.
- 2) Calcule la función de beneficio, $\Pi(p)$. Confirme que coincide con la encontrada en el inciso (c).
- 3) Reemplazando la función de oferta en las demandas condicionales de factores, obtenga las demandas de factores $K^d(p) = K^c(Y^s(p))$ y $L^d(p) = L^c(Y^s(p))$. Confirme que coinciden con las encontradas en el inciso (c).

2. [40 puntos] *Teoría del Consumidor*

Considere un consumidor con preferencias representadas por la siguiente función de utilidad:

$$U(x_1, x_2) = \ln \left(1 + x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} \right)$$

con $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. La restricción presupuestaria del consumidor es

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$$

con $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ y $m > 0$ dados.

- a) Argumente que las preferencias son monótonas.
- b) Resuelva el problema de maximización de la utilidad, sujeta a la restricción presupuestaria. Encuentre la demanda marshalliana de cada bien.
- c) Grafique la Curva de Engel para cada bien. Determine si los bienes 1 y 2 son normales o inferiores.
- d) Grafique las curvas de demanda marshallianas de cada bien (p_i en el eje vertical, x_i en el eje horizontal). Determine si los bienes 1 y 2 son ordinarios o Giffen.
- e) ¿Qué ocurre con las curvas de demanda marshallianas del inciso anterior cuando aumenta el ingreso?
¿Cómo se relaciona esto con su respuesta al inciso (c)?
- f) ¿Qué ocurre con las curvas de demanda marshallianas del inciso (d) cuando aumenta el precio del otro bien? ¿Cómo se relaciona esto con la complementariedad o sustituibilidad bruta entre los bienes 1 y 2?
- g) En clase vimos que las demandas marshallianas correspondientes a preferencias Cobb-Douglas del tipo $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$ son $x_1^d = \frac{1}{2} \frac{m}{p_1}$ y $x_2^d = \frac{1}{2} \frac{m}{p_2}$. ¿Cómo se comparan estas funciones de demanda con las encontradas en el inciso (b)? ¿Puede dar una explicación para el resultado encontrado?

3. [15 puntos] *Preguntas Cortas*

Responda de manera breve y precisa.

- a) Usando datos de una empresa sobre precios de los insumos (w_1, w_2) y cantidad producida (y), un analista estima la siguiente función de costo total para la empresa: $C(w_1, w_2, y) = 2w_1^{\frac{1}{2}} w_2^{\frac{1}{2}} y$. Un compañero de trabajo le dice al analista que su estimación no es razonable. ¿Usted qué cree?
- b) Una empresa produce un bien utilizando un único insumo. Sabemos que, cuando el precio de venta es $p = 10$ y el precio del insumo es $w = 1$, la producción que maximiza el beneficio es positiva. ¿Cuál es el costo marginal de producción en el óptimo? ¿Y la productividad marginal del insumo?
- c) Una empresa produce un bien utilizando dos insumos. Cuando el precio del insumo L es $w = 4$ y el del insumo K es $r = 2$, la empresa elige cantidades positivas de ambos insumos. En la canasta (K, L) elegida, las productividades marginales de los insumos son $F_L = 1$ y $F_K = 2$. Determine si la elección de la empresa maximiza sus beneficios.