

EXAMEN FINAL PARA METODOS EMPIRICOS EN MACROECONOMIA ESTRUCTURAL

FELIPE I. TAPPATA

RESUMEN. Este documento contiene la solución al examen final de la materia *Métodos Empíricos en Macroeconomía Estructural* (MT99) en la Universidad Torcuato Di Tella, segundo trimestre de 2025. El código usado fue entregado junto a este documento, y se puede encontrar también en el repositorio <https://github.com/felipetappata/macrometrics-final>. Las consignas originales (con pequeñas modificaciones que no alteran el significado) han sido reproducidas dentro de cuadros intercalados con las soluciones para facilitar la lectura. Corriendo el archivo `main.jl`, se replican todas las tablas y figuras del trabajo. Se requiere una instalación de Julia y de las librerías usadas.

1. NEWS, NOISE, AND FLUCTUATIONS

Este ejercicio está basado en el paper “News, Noise, and Fluctuations: An Empirical Exploration” de Blanchard, L’Huillier y Lorenzoni (2013). Nos enfocaremos principalmente en las secciones 1 y 2. Puede usar la versión impresa del paper o su versión de working paper, que tiene un poco más de detalles en el apéndice.

El paper comienza suponiendo que la productividad a_t (en logs), es la suma de un componente permanente, x_t , y un componente transitorio, z_t :

$$a_t = x_t + z_t. \quad (1)$$

El componente permanente sigue el proceso

$$\Delta x_t = \rho_x \Delta x_{t-1} + \epsilon_t, \quad (2)$$

con $\rho_x \in [0, 1)$ y ϵ_t i.i.d. normal con media cero y varianza σ_ϵ^2 . El componente transitorio sigue un proceso estacionario

$$z_t = \rho_z z_{t-1} + \eta_t, \quad (3)$$

con $\rho_z \in [0, 1)$ y η_t i.i.d. normal con media cero y varianza σ_η^2 . Los shocks ϵ_t y η_t son independientes entre sí. Siguiendo al paper, imponemos la condición

$$\rho_x = \rho_z = \rho.$$

Inciso 1. Pruebe que la restricción en la ecuación (5) del paper,

$$\rho \sigma_\epsilon^2 = (1 - \rho)^2 \sigma_\eta^2, \quad (4)$$

implica que el proceso univariado de a_t sigue una martingala:

$$E[a_{t+1} \mid a_t, a_{t-1}, \dots] = a_t.$$

¿Cómo queda la condición si permitimos $\rho_x \neq \rho_z$?

Solución 1. Demostraremos primero que las restricciones dadas son suficientes para que el proceso tecnológico a_t siga una martingala, y luego veremos que $\rho_x \neq \rho_z$ implica que no es posible que a_t siga una martingala.

Proposición 1 (Productividad es martingala). *Dados los procesos*

$$\Delta x_t = \rho_x \Delta x_{t-1} + \epsilon_t,$$

$$z_t = \rho_z z_{t-1} + \eta_t,$$

$$a_t = x_t + z_t,$$

con $\rho_x, \rho_z \in [0, 1)$ y ϵ_t, η_t i.i.d. normales con varianzas σ_ϵ^2 y σ_η^2 , los supuestos

$$\rho_x = \rho_z = \rho,$$

$$\rho \sigma_\epsilon^2 = (1 - \rho)^2 \sigma_\eta^2,$$

implican que

$$E[a_{t+1} \mid a_t, a_{t-1}, \dots] = a_t.$$

Demostración. Como $\rho \in [0, 1)$, los procesos Δx_t y z_t son AR(1) estacionarios; por lo tanto $\Delta z_t := z_t - z_{t-1}$ es estacionario, y $\Delta a_t := \Delta x_t + \Delta z_t$ es gaussiano estacionario (es suma de procesos independientes, estacionarios y gaussianos). Para un proceso gaussiano estacionario, no-correlación serial es equivalente a independencia; luego, si la función de autocovarianza $\gamma_{\Delta a}(k) := \text{cov}(\Delta a_t, \Delta a_{t-k}) = 0$ para todo $k \geq 1$, los incrementos $\{\Delta a_t\}$ son i.i.d. con media cero, y escribiendo $a_{t+1} = a_t + \Delta a_{t+1}$ se obtiene $E[a_{t+1} \mid a_t, a_{t-1}, \dots] = a_t$. Alcanza entonces con probar que $\gamma_{\Delta a}(k) = 0$ para todo $k \geq 1$.

Sea $\rho_x = \rho_z = \rho$. Como $\Delta a_t = \Delta x_t + \Delta z_t$ y los procesos $\{\epsilon_s\}, \{\eta_s\}$ son mutuamente independientes, tenemos $\gamma_{\Delta a}(k) = \gamma_{\Delta x}(k) + \gamma_{\Delta z}(k)$. El proceso $\Delta x_t = \rho \Delta x_{t-1} + \epsilon_t$ es un AR(1) estacionario con función de autocovarianza $\gamma_{\Delta x}(k) = \sigma_\epsilon^2 (1 - \rho^2)^{-1} \rho^k$. El proceso $z_t = \rho z_{t-1} + \eta_t$ es un AR(1) estacionario con autocovarianza $\gamma_z(k) = \sigma_\eta^2 (1 - \rho^2)^{-1} \rho^k$. Para $k \geq 1$, la autocovarianza de $\Delta z_t = z_t - z_{t-1}$ es

$$\gamma_{\Delta z}(k) = 2\gamma_z(k) - \gamma_z(k-1) - \gamma_z(k+1) = \gamma_z(0) \rho^{k-1} (2\rho - 1 - \rho^2) = -\frac{(1 - \rho)^2 \sigma_\eta^2}{1 - \rho^2} \rho^{k-1}.$$

Sumando ambas contribuciones obtenemos, para $k \geq 1$,

$$\gamma_{\Delta a}(k) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \rho^2} \rho^k - \frac{(1 - \rho)^2 \sigma_\eta^2}{1 - \rho^2} \rho^{k-1} = \frac{\rho^{k-1}}{1 - \rho^2} [\rho \sigma_\epsilon^2 - (1 - \rho)^2 \sigma_\eta^2].$$

Por lo tanto, $\gamma_{\Delta a}(k) = 0$ para todo $k \geq 1$ si y solo si $\rho \sigma_\epsilon^2 = (1 - \rho)^2 \sigma_\eta^2$. $\square$

Consideremos ahora el caso general $\rho_x \neq \rho_z$. Repitiendo el cálculo anterior sin imponer $\rho_x = \rho_z$, las autocovarianzas individuales son $\gamma_{\Delta x}(k) = \sigma_\epsilon^2 (1 - \rho_x^2)^{-1} \rho_x^k$ y $\gamma_{\Delta z}(k) = -\sigma_\eta^2 (1 - \rho_z)^2 (1 - \rho_z^2)^{-1} \rho_z^{k-1}$ para $k \geq 1$, de modo que

$$\gamma_{\Delta a}(k) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \rho_x^2} \rho_x^k - \frac{(1 - \rho_z)^2 \sigma_\eta^2}{1 - \rho_z^2} \rho_z^{k-1}.$$

Para que $\gamma_{\Delta a}(k) = 0$ para todo $k \geq 1$, necesitamos que los dos términos se cancelen a cada rezago. Como ρ_x^k y ρ_z^{k-1} decaen a tasas geométricas distintas cuando $\rho_x \neq \rho_z$, su cociente ρ_x^k / ρ_z^{k-1} no es constante en k , ya que vale $\rho_x / 1$ en $k = 1$ y ρ_x^2 / ρ_z en $k = 2$. Es imposible que una sola restricción sobre las varianzas iguale a cero una expresión cuya dependencia en k cambia de forma, y por lo tanto no existe ninguna combinación de σ_ϵ^2 y σ_η^2 que haga

$\gamma_{\Delta a}(k) = 0$ simultáneamente para todo k . La condición $\rho_x = \rho_z$ es entonces necesaria para la propiedad de martingala.

Además de observar a_t , los consumidores observan una señal ruidosa del componente permanente x_t :

$$s_t = x_t + \nu_t, \quad (5)$$

donde ν_t es i.i.d. normal con media cero, varianza σ_ν^2 , y ortogonal a los otros shocks. El paper supone la siguiente función de consumo (en logs):

$$c_t = \lim_{j \rightarrow \infty} E_t[a_{t+j}]. \quad (6)$$

El paper continúa suponiendo que el output se determina únicamente por la demanda:

$$y_t = c_t.$$

La función de producción (en forma log-lineal) es $y_t = a_t + n_t$, donde y_t es el logaritmo del output y n_t el logaritmo de la demanda de trabajo. Como el producto se determina por la demanda, la demanda de trabajo responde a las necesidades de producción:

$$n_t = y_t - a_t.$$

Inciso 2. Muestre como llegar a la ecuación (8) del paper:

$$c_t = E_t[c_{t+1}].$$

¿Le suena de algún lado esta ecuación? Dado este resultado, explique la intuición económica de la ecuación (6).

Solución 2. Demostraremos que la función de consumo dada por $c_t = \lim_{j \rightarrow \infty} E_t[a_{t+j}]$ satisface la ecuación $c_t = E_t[c_{t+1}]$ y luego discutiremos la intuición económica de esta función de consumo.

Proposición 2 (Consumo es martingala). *Si el consumo se define como $c_t = \lim_{j \rightarrow \infty} E_t[a_{t+j}]$, entonces*

$$c_t = E_t[c_{t+1}].$$

Demostración. Verifiquemos primero que el límite que define c_t existe. Escribamos $a_{t+j} = x_{t+j} + z_{t+j}$ y tomemos E_t en cada componente. Como z_t es AR(1) estacionario con $\rho \in [0, 1)$, tenemos $E_t[z_{t+j}] = \rho^j E_t[z_t]$, y como Δx_t es AR(1) estacionario con el mismo parámetro, $E_t[\Delta x_{t+k}] = \rho^k E_t[\Delta x_t]$ para todo $k \geq 1$. Entonces

$$E_t[a_{t+j}] = E_t[x_t] + E_t[\Delta x_t] \sum_{k=1}^j \rho^k + \rho^j E_t[z_t],$$

y, tomando el límite respecto a j ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_t[a_{t+j}] = E_t[x_t] + \frac{\rho}{1 - \rho} E_t[\Delta x_t], \quad (7)$$

por lo cual c_t está bien definido y es finito. Lo mismo vale para $c_{t+1} = \lim_{j \rightarrow \infty} E_{t+1}[a_{t+1+j}]$.

Tomando E_t a ambos lados de la definición de c_{t+1} ,

$$E_t[c_{t+1}] = E_t \left[\lim_{j \rightarrow \infty} E_{t+1}[a_{t+1+j}] \right].$$

La convergencia mostrada en la ecuación (7) implica que la sucesión $(E_{t+1}[a_{t+1+j}])_{j \geq 0}$ está acotada uniformemente en j por una variable aleatoria integrable, y por el teorema de

convergencia dominada podemos intercambiar E_t y el límite. Aplicando la ley de expectativas iteradas, que vale porque la información¹ de los consumidores al momento t está contenida en la disponible al momento $t + 1$ obtenemos

$$E_t[c_{t+1}] = \lim_{j \rightarrow \infty} E_t[a_{t+1+j}].$$

Reindexando con $k = j + 1$ y usando la definición en la ecuación (6),

$$E_t[c_{t+1}] = \lim_{k \rightarrow \infty} E_t[a_{t+k}] = c_t. \quad \square$$

La ecuación $c_t = E_t[c_{t+1}]$ establece que el consumo es una martingala, es decir, la mejor predicción del consumo futuro es el consumo corriente y los cambios en el consumo son impredecibles ($E_{t-1}[\Delta c_t] = 0$). Si bien esta condición no es en sí una ecuación de Euler en nuestro modelo, porque no es una condición de optimalidad sino un corolario del proceso supuesto para consumo, evoca el resultado central de Hall (1978).² Hall, trabajando en la tradición de la teoría del ingreso permanente, muestra que la ecuación de Euler de un consumidor que maximiza utilidad esperada descontada sujeto a una restricción presupuestaria intertemporal implica

$$E_t[u'(c_{t+1})] = \frac{1 + \delta}{1 + r} u'(c_t),$$

donde δ es la tasa subjetiva de descuento y r la tasa de interés real, ambas constantes. La utilidad marginal evoluciona entonces como martingala con tendencia. Bajo utilidad cuadrática (Hall, 1978, corolario 3), la ecuación de Euler se reduce a

$$c_{t+1} = \bar{c} \frac{r - \delta}{1 + r} + \frac{1 + \delta}{1 + r} c_t + \varepsilon_{t+1},$$

con $E_t[\varepsilon_{t+1}] = 0$. Cuando $r = \delta$, la constante se anula y el coeficiente del consumo rezagado es 1, recuperando exactamente $c_t = E_t[c_{t+1}]$. El consumo sigue un *random walk*, y ninguna variable observada en t o antes, fuera de c_t , debería ayudar a predecir c_{t+1} . Esta es la implicación que Hall testea empíricamente. Aun con utilidad general, el *random walk* es una aproximación de primer orden cuando $r \approx \delta$ y los shocks son pequeños (Hall, 1978, corolario 5). En el modelo de Blanchard, L'Huillier y Lorenzoni, en cambio, la propiedad de martingala es exacta y no depende de supuestos sobre preferencias. Se deduce directamente de la definición (6) y la ley de expectativas iteradas.

La ecuación (6) define c_t como el nivel al que los consumidores esperan que la productividad converja en el largo plazo. Como $a_t = x_t + z_t$ y el componente transitorio satisface $\lim_{j \rightarrow \infty} E_t[z_{t+j}] = 0$, ese nivel queda determinado exclusivamente por el componente permanente x_t . La ecuación es entonces la hipótesis de ingreso permanente aplicada a este modelo, donde los consumidores fijan c_t al nivel sostenible de productividad, ignorando fluctuaciones transitorias en z_t . La propiedad de martingala es la consecuencia natural, ya que toda la información disponible sobre el componente permanente está incorporada en c_t y solo información genuinamente nueva (las innovaciones ϵ_t , η_t y ν_t) puede modificar el consumo.

¹Hablo informalmente de o relego a notas al pie lo que concierne filtraciones o sigma-álgebras principalmente porque no es necesariamente relevante al nivel de los ejercicios bajo consideración, y también para evitar cometer errores innecesarios debidos a mi falta de familiaridad con los conceptos.

²Cochrane (2024) es un relato entretenido de la historia del *random walk model of consumption* y la transición de la macroeconomía post-crítica de Lucas hacia su forma moderna.

Dados c_t y los shocks, podemos recuperar trivialmente y_t y n_t . Por lo tanto, nos enfocaremos principalmente en la determinación de c_t .

Inciso 3. Pruebe lo siguiente:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_t[x_{t+j} - x_t] = \frac{\rho}{1 - \rho} E_t[x_t - x_{t-1}].$$

Explique por qué aparece la expectativa E_t del lado derecho a pesar de tener variables indexadas a los momentos t y $t - 1$ (Hint: ¿qué observa y qué no observa el consumidor?).

Dada esta ecuación, encuentre la expresión (9) del paper:

$$c_t = \frac{1}{1 - \rho} E_t[x_t - \rho x_{t-1}]. \quad (8)$$

Solución 3. Demostraremos primero la expresión para el valor esperado de crecimiento de productividad acumulado en el largo plazo, y luego usaremos ese resultado para derivar la ecuación (8).

Proposición 3 (Crecimiento acumulado de largo plazo). Sea $\Delta x_t = \rho \Delta x_{t-1} + \epsilon_t$ con $\rho \in [0, 1)$ y ϵ_t i.i.d. con media cero. Entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_t[x_{t+j} - x_t] = \frac{\rho}{1 - \rho} E_t[\Delta x_t].$$

Demostración. Como Δx_t es AR(1) estacionario, iterando la recursión k veces y usando $E_t[\epsilon_{t+s}] = 0$ para $s \geq 1$ se obtiene $E_t[\Delta x_{t+k}] = \rho^k E_t[\Delta x_t]$ para todo $k \geq 1$. Escribiendo el crecimiento acumulado como suma telescópica, $x_{t+j} - x_t = \sum_{k=1}^j \Delta x_{t+k}$, y tomando E_t

$$E_t[x_{t+j} - x_t] = E_t[\Delta x_t] \sum_{k=1}^j \rho^k.$$

Como $|\rho| < 1$, la serie geométrica converge a $\rho/(1 - \rho)$ y se obtiene el resultado. $\square$

La expectativa E_t aparece del lado derecho a pesar de que x_t y x_{t-1} están indexados en momentos corrientes o pasados porque el componente permanente x_t no es observable. Los consumidores observan la productividad $a_t = x_t + z_t$, que mezcla ambos componentes, y una señal ruidosa $s_t = x_t + \nu_t$. Ninguna de estas observaciones revela x_t exactamente, de modo que los consumidores enfrentan un problema de extracción de señal y su mejor estimación del componente permanente es $E_t[x_t]$, no x_t mismo.

Derivemos ahora la ecuación (8). La función de consumo es $c_t = \lim_{j \rightarrow \infty} E_t[a_{t+j}]$. Descomponiendo $a_{t+j} = x_{t+j} + z_{t+j}$ y notando que $E_t[z_{t+j}] = \rho^j E_t[z_t]$ tiende a cero cuando $j \rightarrow \infty$, solo el componente permanente sobrevive en el largo plazo

$$c_t = \lim_{j \rightarrow \infty} E_t[x_{t+j}] = E_t[x_t] + \frac{\rho}{1 - \rho} E_t[\Delta x_t],$$

donde la segunda igualdad aplica la Proposición 3. Reemplazando $E_t[\Delta x_t] = E_t[x_t] - E_t[x_{t-1}]$ y simplificando obtenemos

$$c_t = \frac{1}{1 - \rho} E_t[x_t - \rho x_{t-1}].$$

En lo que sigue, usaremos una notación un poco más general que puede usarse para modelos en los que los agentes económicos tienen observación parcial de algunos shocks

estructurales y, por lo tanto, enfrentan un problema de extracción de señal para tomar decisiones. Luego lo especificaremos para nuestro modelo.

Suponga que $X_t \in \mathbb{R}^n$ es un vector de n variables de estado exógenas no observables y que $S_t \in \mathbb{R}^m$ es un vector de m variables que observan los agentes económicos del modelo. Suponga que la relación entre estas variables viene dada por el siguiente modelo lineal en estado espacio:

$$X_t = AX_{t-1} + BV_t, \quad (9)$$

$$S_t = CX_t + DV_t, \quad (10)$$

donde V_t es un vector de q shocks i.i.d. con media cero y matriz de varianzas y covarianzas Q . La matriz A es $n \times n$, B es $n \times q$, C es $m \times n$ y D es $m \times q$. Note que, en este tipo de modelos, las decisiones de los agentes no pueden ser funciones de X_t porque no es observable.

En el modelo de la sección I del paper, el vector de variables de estado exógenas es $X_t = [x_t, x_{t-1}, z_t]'$, el vector de variables observables por los agentes del modelo es $S_t = [a_t, s_t]'$, y el vector de shocks es $V_t = [\epsilon_t, \eta_t, \nu_t]'$. Las ecuaciones (9) y (10) reflejan la evolución de las variables de estado no observables y su relación con las variables que observan los agentes al tomar decisiones: la productividad a_t y la señal s_t .

Inciso 4. Explique en detalle cómo encontrar los coeficientes de las matrices A , B , C y D usando las ecuaciones (1), (2), (3) y (5) de nuestro modelo.

Solución 4. El objetivo es expresar las ecuaciones (1)–(3) y (5) en la forma *state space*

$$X_t = AX_{t-1} + BV_t,$$

$$S_t = CX_t + DV_t.$$

Las variables de estado naturales del modelo son x_t y z_t , pero la ecuación (2) gobierna la primera diferencia Δx_t como un AR(1). Sustituyendo $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ y $\Delta x_{t-1} = x_{t-1} - x_{t-2}$, obtenemos

$$x_t = (1 + \rho)x_{t-1} - \rho x_{t-2} + \epsilon_t, \quad (11)$$

de modo que el nivel de x_t depende de dos rezagos. Un vector $[x_t, z_t]'$ no bastaría para escribir la transición como sistema de primer orden, ya que x_{t-2} no estaría disponible. La solución estándar es la *companion form*, que incorpora x_{t-1} como variable auxiliar y eleva la dimensión del estado a $n = 3$ con $X_t = [x_t, x_{t-1}, z_t]'$.

Construimos primero las matrices de transición A y B . El primer componente de X_t es x_t , dado por la ecuación (11); el segundo es la identidad $x_{t-1} = x_{t-1}$, que simplemente traslada el primer elemento de X_{t-1} sin intervención de los shocks; y el tercero es $z_t = \rho z_{t-1} + \eta_t$, dado directamente por la ecuación (3). Leyendo los coeficientes fila por fila,³

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 + \rho & -\rho & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}, \quad B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Para las matrices C y D , expresamos cada componente de $S_t = [a_t, s_t]'$ en función del estado contemporáneo $X_t = [x_t, x_{t-1}, z_t]'$ y de los shocks V_t . La ecuación (1) da $a_t = x_t + z_t$,

³El Apéndice A de Blanchard, L'Huillier y Lorenzoni (2013) reporta $B_{31} = 1$, lo cual implicaría que el componente transitorio z_t recibe el shock permanente ϵ_t . Esto es inconsistente con la ecuación (3), $z_t = \rho z_{t-1} + \eta_t$, que no contiene ϵ_t . El paquete de replicación del paper (en el archivo `ML_baseline.mod`, bloque de ecuaciones del modelo) confirma la especificación correcta con $B_{31} = 0$.

que carga sobre el primer y tercer componente de X_t sin contribución directa de V_t . La ecuación (5) da $s_t = x_t + \nu_t$, donde x_t entra a través de C y el ruido a la señal, ν_t , entra a través de D . Las matrices resultantes son

$$C_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

La matriz de covarianzas de los shocks es $Q := \text{var}[V_t] = \text{diag}(\sigma_\epsilon^2, \sigma_\eta^2, \sigma_\nu^2)$, diagonal por la independencia mutua de ϵ_t , η_t y ν_t .

Para terminar de resolver el modelo necesitamos determinar las variables endógenas. En el modelo de la sección I, el consumo c_t es la variable de estado endógena relevante que, como vimos, satisface la ecuación (8).^a Más en general, considere un conjunto de variables endógenas que controla el agente $Y_t \in \mathbb{R}^p$ (en nuestro caso, c_t).^b Suponga que podemos escribir el modelo (ya sea lineal o linealizado), del siguiente modo:

$$F E_t[Y_{t+1}] + GY_t + HY_{t-1} + MS_t + N E_t[S_{t+1}] = 0, \quad (14)$$

donde F , G , H , M y N son matrices con parámetros. Este conjunto de ecuaciones refleja condiciones de primer orden y otras condiciones de equilibrio del modelo. La diferencia de esta familia de modelos con lo que vimos en clase es que no aparecen las variables de estado X_t , que son no observables por los agentes, sino las variables S_t que sí observan. En particular, las variables de estado exógenas no observables X_t solo entran en las condiciones de equilibrio a través de las variables observables S_t .

Para resolver el modelo, haremos la conjetura de que la solución tiene la forma lineal

$$Y_t = PY_{t-1} + QS_t + RX_{t|t}, \quad (15)$$

donde $X_{t|t} = E_t[X_t | S_t, S_{t-1}, \dots, S_1]$ es el valor esperado de X_t condicional en toda la información observada por los agentes económicos hasta el momento t . Esto no es otra cosa que el valor filtrado de X_t que sale del filtro de Kalman. Las dimensiones de las matrices son: P , $p \times p$; Q , $p \times m$; y R , $p \times n$. Encontrar la solución del modelo implica encontrar las matrices P , Q , R y la expectativa $X_{t|t}$ para cada momento del tiempo. Encontraremos la solución usando el método de conjetura y verificación.

Inciso 5. Reemplace la conjetura (15) en (14) y use la estructura del modelo dada por (9) y (10). Haciendo coincidir coeficientes, y exigiendo que las identidades que salen valen para todo t , muestre que obtiene tres ecuaciones matriciales de la forma

$$FP^2 + GP + H = 0, \quad (16)$$

$$(FP + G)Q + M = 0, \quad (17)$$

$$(FP + G)R + [F(QC + R) + NC]A = 0. \quad (18)$$

^aTambién está el producto y la demanda de trabajo, pero como se determinan trivialmente luego de conocer c_t , las ignoraremos.

^bEsta forma de escribir el modelo es un poco distinta a lo que está en mis notas de clase. Allí separábamos variables de control de variables de estado. Dentro de las variables de estado, había algunas exógenas y otras endógenas. En este caso, ponemos en Y_t a todas las variables endógenas, ya sea de control o de estado. En el vector X_t solo aparecen las variables de estado exógenas (y no observables).

Solución 5. Procedemos por conjetura y verificación. Sustituiremos la forma conjeturada (15) en la condición de equilibrio (14), computaremos las expectativas condicionales usando la

estructura del modelo, y luego igualaremos a cero los coeficientes que multiplican a cada grupo de variables.

Comencemos por las expectativas condicionales que aparecen en (14), donde $E_t[\cdot]$ denota la expectativa del agente condicional en su información $\{S_t, S_{t-1}, \dots, S_1\}$. Para $E_t[S_{t+1}]$, sustituimos la ecuación de transición (9) en la de observación (10) y obtenemos $S_{t+1} = CA X_t + (CB + D) V_{t+1}$. Como V_{t+1} es independiente de la información en t ,

$$E_t[S_{t+1}] = CA X_{t|t}. \quad (19)$$

Para $E_t[Y_{t+1}]$, adelantamos la conjetura un período y tomamos E_t . El filtro de Kalman en estado estacionario predice $X_{t+1|t} = A X_{t|t}$, y la innovación esperada del pronóstico es cero, de modo que $E_t[X_{t+1|t+1}] = A X_{t|t}$.⁴ Combinando con (19),

$$E_t[Y_{t+1}] = PY_t + (QC + R) A X_{t|t}. \quad (20)$$

Sustituyendo (19) y (20) en la condición de equilibrio (14),

$$F[PY_t + (QC + R)A X_{t|t}] + GY_t + HY_{t-1} + MS_t + NCA X_{t|t} = 0.$$

Agrupando por Y_t y $X_{t|t}$,

$$(FP + G)Y_t + HY_{t-1} + MS_t + [F(QC + R) + NC]A X_{t|t} = 0. \quad (21)$$

Reemplazamos ahora Y_t por la conjetura (15) en (21), expandimos y recolectamos por Y_{t-1} , S_t y $X_{t|t}$,

$$[FP^2 + GP + H]Y_{t-1} + [(FP + G)Q + M]S_t + \{(FP + G)R + [F(QC + R) + NC]A\}X_{t|t} = 0. \quad (22)$$

Esta identidad debe valer para todo t y toda realización. La variable endógena Y_{t-1} es libre y no afecta a las realizaciones exógenas S_t ni a $X_{t|t}$, de modo que su coeficiente debe anularse. Por un razonamiento análogo, los coeficientes de S_t y de $X_{t|t}$ también deben ser cero.⁵ Se obtienen así las tres ecuaciones que buscábamos,

$$\begin{aligned} FP^2 + GP + H &= 0, \\ (FP + G)Q + M &= 0, \\ (FP + G)R + [F(QC + R) + NC]A &= 0. \end{aligned}$$

Las incógnitas a resolver son las matrices P , Q y R . La ecuación (16) es una ecuación matricial cuadrática en P . Si conocemos P , (17) determina Q de manera lineal, y dados P y Q , (18) también determina R linealmente. Por lo tanto, el trabajo más delicado es encontrar la matriz P que resuelve (16). Hay más de una forma de hacerlo. La sección 6.3 de Uhlig (1995) muestra una forma.

⁴La conjetura (15) postula coeficientes invariantes en el tiempo, lo cual es consistente con trabajar con la ganancia de Kalman de estado estacionario K . La actualización de Kalman es $X_{t+1|t+1} = X_{t+1|t} + K(S_{t+1} - C X_{t+1|t})$. Tomando E_t , el término de innovación se anula porque $E_t[S_{t+1}] = CA X_{t|t} = C X_{t+1|t}$.

⁵Que S_t y $X_{t|t}$ no son independientes (están vinculados por la actualización de Kalman $X_{t|t} = (I - KC)A X_{t-1|t-1} + K S_t$) podría parecer un obstáculo. Sin embargo, sustituyendo esta descomposición en (22) (con el coeficiente de Y_{t-1} ya eliminado), la identidad resultante involucra S_t y el estado filtrado predeterminado $X_{t-1|t-1}$, que sí son independientes. La observación S_t varía libremente a través de V_t para cualquier pasado fijo, lo que fuerza a ambos coeficientes a anularse por separado.

Inciso 6. Muestre cómo usar la descomposición QZ que vimos en clase para resolver la ecuación matricial cuadrática (16). (Hint: puede ayudarse con inteligencia artificial. Con el *prompt* adecuado se puede llegar a la solución de esta pregunta. Si usa ChatGPT o cualquier otro LLM, explique en detalle los pasos y por qué funciona.)

Solución 6. Mostraremos que la ecuación matricial cuadrática (16) puede resolverse reduciéndola a un sistema lineal de primer orden de dimensión $2p$ y aplicando la descomposición QZ al par de matrices que lo define. La linealización companion que reduce la ecuación cuadrática a un sistema de primer orden sigue a Uhlig (1995, §6.3). La resolución del sistema resultante es el método de Klein (2000), que, según explica DeJong y Dave (2011, §4.5), combina la factorización QZ (descomposición generalizada de Schur) empleada por Sims (2002) con la partición en variables predeterminadas y no predeterminadas de Blanchard y Kahn (1980); seguimos la exposición de Hevia (2025).⁶

La ecuación (16), $FP^2 + GP + H = 0$, caracteriza el componente autorregresivo de la conjetura (15) y surge de igualar a cero el coeficiente de Y_{t-1} en (22). Equivalentemente, si $Y_t = PY_{t-1}$ (ignorando los términos forzantes S_t y $X_{t|t}$, cuyos coeficientes ya fueron identificados por (17) y (18)), la condición de equilibrio (14) se reduce a la ecuación en diferencias de segundo orden

$$F E_t[Y_{t+1}] + G Y_t + H Y_{t-1} = 0, \quad (23)$$

y sustituyendo $E_t[Y_{t+1}] = PY_t = P^2 Y_{t-1}$ se recupera (16).

Para aplicar la descomposición QZ reducimos (23) a un sistema de primer orden. Definimos el vector $\tilde{W}_t = [Y'_{t-1}, Y'_t]' \in \mathbb{R}^{2p}$, donde Y_{t-1} es la variable predeterminada (de estado) e Y_t la no predeterminada (de salto), y las matrices $2p \times 2p$

$$\mathcal{A}_{2p \times 2p} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_{2p \times 2p} = \begin{bmatrix} 0 & I_p \\ -H & -G \end{bmatrix}. \quad (24)$$

La identidad $Y_t = Y_t$ junto con (23) reescrita como $FY_{t+1} = -GY_t - HY_{t-1}$ producen el sistema⁷

$$\mathcal{A} \tilde{W}_{t+1} = \mathcal{B} \tilde{W}_t, \quad (25)$$

que tiene p variables de estado y p variables de salto.⁸

Aplicamos ahora la descomposición QZ al par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Por el Teorema 1 de Hevia (2025), existen matrices unitarias Q y Z y matrices triangulares superiores S y T tales que $Q\mathcal{A}Z = S$ y $Q\mathcal{B}Z = T$. Los autovalores generalizados del par son $\lambda_i = t_{ii}/s_{ii}$, con la convención de que

⁶En esta solución, las letras Q , Z , S y T denotan las matrices de la descomposición QZ y no las matrices homónimas de la conjetura (15) o del modelo de estado espacio. Nótese que Uhlig (1995, Teorema 3) resuelve la ecuación cuadrática por la vía alternativa de una descomposición en autovalores y autovectores generalizados, que requiere que P sea diagonalizable. El método de Klein (2000) basado en la descomposición QZ no necesita este supuesto.

⁷Al suprimir los términos “forzantes” S_t y $X_{t|t}$, cuya contribución ya está aislada en los coeficientes (17) y (18), la dinámica residual $Y_t = PY_{t-1}$ es determinística condicional en Y_{t-1} , de manera que $E_t[Y_{t+1}] = Y_{t+1}$ y el operador de expectativas puede omitirse. Alternativamente, el sistema *companion* puede escribirse como $\mathcal{A} E_t[\tilde{W}_{t+1}] = \mathcal{B} \tilde{W}_t$; la descomposición QZ opera sobre las matrices de coeficientes $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ y el argumento de estabilidad que sigue es el mismo.

⁸El par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es equivalente, salvo reordenamiento de bloques, al par (Δ, Ξ) de Uhlig (1995, Teorema 3), quien define $\Delta = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$ y $\Xi = \begin{bmatrix} -G & -H \\ I_p & 0 \end{bmatrix}$ con el vector $W_t = [Y'_t, Y'_{t-1}]'$. Situamos las variables de estado primero para mantener la correspondencia con la convención de Blanchard y Kahn (1980) adoptada en clase y utilizada por Klein (2000).

$s_{ii} = 0$ corresponde a $|\lambda_i| = \infty$. Como el ordenamiento de las entradas diagonales puede elegirse libremente (propiedad 5 del teorema), colocamos primero los pares estables, es decir, aquellos que satisfacen $|s_{ii}| > |t_{ii}|$ ($|\lambda_i| < 1$).⁹ Premultiplicando (25) por Q e insertando $ZZ^H = I$ se obtiene $S z_{t+1} = T z_t$, donde $z_t := Z^H \tilde{W}_t$. Particionando en bloques estable e inestable,

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{t+1}^s \\ z_{t+1}^u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t^s \\ z_t^u \end{bmatrix},$$

donde S_{11} y T_{11} son $n_s \times n_s$ (con n_s la cantidad de autovalores estables) y S_{22}, T_{22} corresponden a los autovalores inestables.

Consideremos primero el bloque inferior (inestable), $S_{22} z_{t+1}^u = T_{22} z_t^u$. Como $|t_{ii}| > |s_{ii}|$ para cada entrada diagonal del bloque inestable, todas las entradas diagonales de T_{22} son no nulas, y como T_{22} es triangular superior, es invertible. Premultiplicando por T_{22}^{-1} se obtiene $z_t^u = T_{22}^{-1} S_{22} z_{t+1}^u$. La matriz $T_{22}^{-1} S_{22}$ es triangular superior con entradas diagonales s_{ii}/t_{ii} que satisfacen $|s_{ii}/t_{ii}| < 1$, de modo que todos sus autovalores son estrictamente menores que uno en módulo. Iterando hacia adelante, $z_t^u = (T_{22}^{-1} S_{22})^j z_{t+j}^u \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$ siempre que la sucesión $\{z_t^u\}$ sea acotada; como buscamos soluciones estables, la única posibilidad es $z_t^u = 0$ para todo t . Con $z_t^u = 0$, el bloque superior se reduce a $S_{11} z_{t+1}^s = T_{11} z_t^s$. Aquí $|s_{ii}| > |t_{ii}|$ para cada entrada del bloque estable, de modo que S_{11} es invertible y la recursión $z_{t+1}^s = S_{11}^{-1} T_{11} z_t^s$ es estable, con autovalores t_{ii}/s_{ii} menores que uno en módulo.

Particionemos la matriz unitaria Z de manera conforme con la separación estable/inestable,

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix},$$

con Z_{11} y Z_{21} de dimensión $p \times n_s$. Invirtiendo la definición $z_t = Z^H \tilde{W}_t$ y usando $z_t^u = 0$ se obtiene $\tilde{W}_t = [Z'_{11}, Z'_{21}]' z_t^s$. Como $\tilde{W}_t = [Y'_{t-1}, Y'_t]'$, los bloques superior e inferior dan respectivamente $Y_{t-1} = Z_{11} z_t^s$ e $Y_t = Z_{21} z_t^s$.

Para que la solución exista y sea única necesitamos la condición de Blanchard y Kahn, que en este contexto requiere exactamente $n_s = p$ autovalores estables, uno por cada variable predeterminada Y_{t-1} . Si se cumple, Z_{11} es una matriz $p \times p$ a la que le exigimos invertibilidad,¹⁰ y podemos eliminar $z_t^s = Z_{11}^{-1} Y_{t-1}$ para obtener $Y_t = Z_{21} Z_{11}^{-1} Y_{t-1}$, de donde

$$P = Z_{21} Z_{11}^{-1}. \quad (26)$$

De forma equivalente, sustituyendo $z_t^s = Z_{11}^{-1} Y_{t-1}$ en la recursión estable y notando que el bloque superior de $\tilde{W}_{t+1} = [Y'_t, Y'_{t+1}]'$ da $z_{t+1}^s = Z_{11}^{-1} Y_t$, se obtiene $Z_{11}^{-1} Y_t = S_{11}^{-1} T_{11} Z_{11}^{-1} Y_{t-1}$ y por lo tanto

$$P = Z_{11} S_{11}^{-1} T_{11} Z_{11}^{-1}. \quad (27)$$

Ambas expresiones son equivalentes y confirman que los autovalores de P son los p autovalores generalizados estables t_{ii}/s_{ii} .

Verifiquemos que P según (26) resuelve la ecuación cuadrática (16). Por construcción, el sistema (25) tiene como única solución acotada $Y_t = P Y_{t-1}$. Sustituyendo en (23) con

⁹La partición estable/inestable requiere que ningún autovalor generalizado se sitúe exactamente sobre el círculo unitario, $|\lambda_i| \neq 1$. Esta es una condición de regularidad estándar del marco de Blanchard y Kahn (1980).

¹⁰Esta es la condición análoga al Supuesto 2 en Hevia (2025), que se invoca para recuperar la solución en términos de las variables originales. Si la cantidad de autovalores estables es menor que p , el equilibrio no existe localmente. Si es mayor, hay indeterminación.

$E_t[Y_{t+1}] = P^2 Y_{t-1}$ se obtiene $(FP^2 + GP + H)Y_{t-1} = 0$ para todo Y_{t-1} , lo cual exige $FP^2 + GP + H = 0$.¹¹

En resumen, el algoritmo para resolver (16) consiste en formar las matrices $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de dimensión $2p \times 2p$ según (24), computar la descomposición QZ del par $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ con los autovalores estables ordenados primero, verificar la condición de Blanchard y Kahn, y calcular $P = Z_{21} Z_{11}^{-1}$. Conocida P , las matrices restantes de la solución conjeturada (15) se recuperan resolviendo los sistemas lineales (17) y (18). En el caso escalar $p = 1$ (como en el modelo de consumo de la sección 1 del paper, donde $Y_t = c_t$), la ecuación (16) se reduce a una cuadrática ordinaria $Fp^2 + Gp + H = 0$ y la condición de Blanchard y Kahn simplemente selecciona la raíz con $|\lambda| < 1$.

Una vez que encontramos P , las matrices Q y R se encuentran fácilmente. Lo mismo que vimos en clase aplica para la solución de este modelo (condiciones de Blanchard-Kahn sobre existencia, unicidad o multiplicidad).

Ahora volveremos al modelo simple de la sección 1.1 del paper. Para este modelo, la solución en la forma (15) ya está dada directamente por la ecuación (8), por lo que no tiene que buscar la matriz cuadrática.

Inciso 7. Use los parámetros de la sección 1.1 del paper y replique los impulso-respuesta a los tres shocks de la Figura 1.

Solución 7. La Figura 1 muestra los impulso-respuesta de la productividad (a_t , línea punteada) y el consumo (c_t , línea sólida) ante cada uno de los tres shocks estructurales, en un horizonte de 20 trimestres. Los parámetros son los de la sección 1.1 del paper: $\rho = 0.891$, $\sigma_u = 0.67\%$ y $\sigma_v = 0.89\%$, donde σ_u es la desviación estándar del crecimiento de productividad Δa_t (ver la Tabla 2 del paper). Bajo la restricción de martingala (4), las desviaciones estándar de los shocks estructurales se obtienen como $\sigma_\epsilon = (1 - \rho)\sigma_u \approx 0.073\%$ y $\sigma_\eta = \sqrt{\rho}\sigma_u \approx 0.632\%$. Las funciones de impulso-respuesta se computan resolviendo la ecuación de Riccati del filtro de Kalman en estado estacionario para obtener la ganancia K y propagando shocks de una desviación estándar a través del sistema aumentado $[X'_t, \hat{X}'_{t|t}]'$, que evoluciona determinísticamente después del impacto. El consumo se extrae en cada horizonte usando la ecuación (8) aplicada al estado filtrado.

Inciso 8. Pruebe que el modelo tiene una representación VAR como en las ecuaciones (8) y (9) de la sección 2.1 del paper. Explique por qué, salvo los dos casos especiales mencionados en el paper, no es posible recuperar shocks estructurales del modelo usando el VAR. (Bonus: replique la Figura 2 del paper.)

Solución 8. Derivaremos la representación VAR de forma reducida para (c_t, a_t) y luego discutiremos la identificación de los shocks estructurales.¹²

¹¹Cuando los p autovalores estables son distintos, esta verificación puede hacerse de manera alternativa mediante una descomposición en autovectores generalizados, que es la ruta elegida por Uhlig (1995, Teorema 3). Cada autovalor generalizado estable λ_i satisface $(F\lambda_i^2 + G\lambda_i + H)u_i = 0$, donde u_i es el componente inferior del autovector correspondiente. Apilando las p ecuaciones y postmultiplicando por la inversa de la matriz de autovectores se recupera (16). El argumento vía descomposición QZ presentado arriba, siguiendo a Klein (2000), no requiere que los autovalores sean distintos.

¹²El enunciado refiere a las ecuaciones (8) y (9) de la sección 2.1 del paper. En la versión publicada (AER), la representación VAR corresponde a las ecuaciones (10) y (11); las ecuaciones (8) y (9) son la propiedad de martingala y la fórmula de consumo, respectivamente. La numeración (8)–(9) coincide con la del *working paper*.

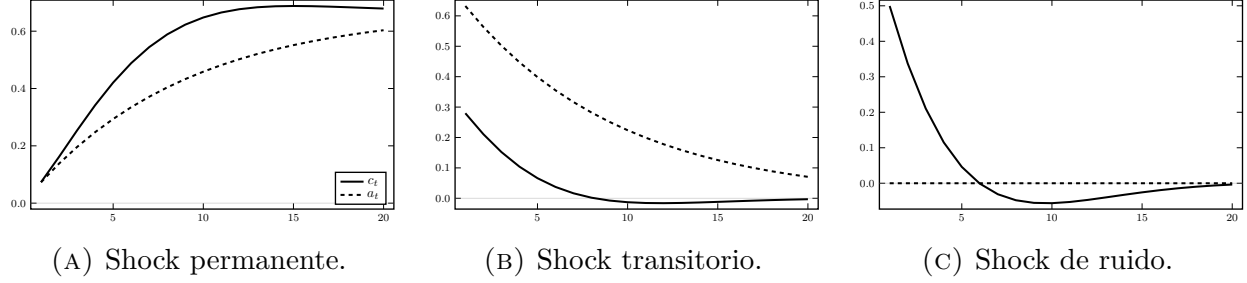


FIGURA 1. Impulso-respuesta a los tres shocks estructurales

Proposición 4 (Representación VAR de forma reducida). *El modelo admite la siguiente representación VAR(1):*

$$\begin{aligned} c_t &= c_{t-1} + u_t^c, \\ a_t &= \rho a_{t-1} + (1 - \rho) c_{t-1} + u_t^a, \end{aligned} \quad (28)$$

donde u_t^c y u_t^a son innovaciones con media cero e incorrelacionadas serialmente respecto de la información del econometrista, esto es, del pasado de c_t y a_t .

Demostración. Comenzamos derivando la ecuación de consumo. La propiedad de martingala demostrada en la Proposición 2 establece $E_{t-1}[c_t] = c_{t-1}$. Como el econometrista observa solamente (c_t, a_t) y el consumo es una función determinística de la información de los agentes (que incluye también la señal s_t), el econometrista tiene débilmente menos información que los agentes. Por la ley de expectativas iteradas, si una variable tiene media condicional cero respecto de la información de los agentes, también la tiene respecto de cualquier subconjunto de esa información.¹³ Definiendo $u_t^c := c_t - c_{t-1}$, se tiene que u_t^c es una innovación respecto a la información del econometrista.

Derivamos ahora la ecuación de productividad. Usando la descomposición $a_t = x_t + z_t$ y la ecuación (3),

$$a_t - \rho a_{t-1} = (x_t - \rho x_{t-1}) + (z_t - \rho z_{t-1}) = (x_t - \rho x_{t-1}) + \eta_t,$$

donde la segunda igualdad sustituye $z_t - \rho z_{t-1} = \eta_t$. Por otro lado, la ecuación (8) evaluada en t da $(1 - \rho) c_t = E_t[x_t - \rho x_{t-1}]$. Tomando E_{t-1} de ambos lados y usando la propiedad de martingala $E_{t-1}[c_t] = c_{t-1}$ junto con la ley de expectativas iteradas,

$$(1 - \rho) c_{t-1} = E_{t-1}[E_t[x_t - \rho x_{t-1}]] = E_{t-1}[x_t - \rho x_{t-1}].$$

Tomando ahora E_{t-1} de la primera expresión y usando que η_t es i.i.d. con media cero, y por lo tanto independiente de toda la información disponible en $t - 1$,

$$E_{t-1}[a_t - \rho a_{t-1}] = E_{t-1}[x_t - \rho x_{t-1}] = (1 - \rho) c_{t-1}.$$

Reordenando, $E_{t-1}[a_t - \rho a_{t-1} - (1 - \rho) c_{t-1}] = 0$. Definiendo $u_t^a := a_t - \rho a_{t-1} - (1 - \rho) c_{t-1}$ y aplicando nuevamente el argumento de proyección al conjunto de información del econometrista, u_t^a es innovación respecto a la información de este. $\square$

En forma matricial, la representación (28) se escribe como

$$\begin{bmatrix} c_t \\ a_t \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \rho & \rho \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} c_{t-1} \\ a_{t-1} \end{bmatrix}_{2 \times 1} + \begin{bmatrix} u_t^c \\ u_t^a \end{bmatrix}_{2 \times 1}.$$

¹³Si $E[w | \mathcal{F}] = 0$ y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $E[w | \mathcal{G}] = E[E[w | \mathcal{F}] | \mathcal{G}] = 0$.

Un aspecto notable de esta representación es la presencia de c_{t-1} en la ecuación de productividad. Univariadamente, la productividad es un *random walk* (por la restricción (4) demostrada en la Proposición 1). Sin embargo, en el sistema bivariado el consumo pasado ayuda a predecir la productividad porque contiene información adicional sobre el componente permanente x_t , obtenida por los consumidores a través de la señal s_t .

Pasemos ahora a la cuestión de identificación. El modelo estructural tiene tres shocks independientes $(\epsilon_t, \eta_t, \nu_t)$, mientras que el VAR de forma reducida produce solamente dos innovaciones (u_t^c, u_t^a) . Las innovaciones de forma reducida son combinaciones lineales de los shocks estructurales, a través del filtro de Kalman y la solución del modelo, de modo que el mapeo de shocks estructurales a innovaciones reducidas es una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$. Como esta transformación tiene un *kernel* no trivial, no es invertible. Infinitas combinaciones de shocks estructurales son consistentes con un par dado de innovaciones. Ningún esquema de identificación puede recuperar tres shocks ortogonales a partir de dos innovaciones.

Hay sin embargo dos casos especiales en los cuales la identificación es posible. El primero es el de *extracción de señal perfecta*, cuando $\sigma_\nu = 0$. En este caso el shock de ruido desaparece y solo quedan dos shocks estructurales (ϵ_t, η_t) . Con información perfecta, $(1 - \rho) c_t = x_t - \rho x_{t-1}$, y el VAR se simplifica a

$$\begin{aligned} c_t &= c_{t-1} + (1 - \rho)^{-1} \epsilon_t, \\ a_t &= \rho a_{t-1} + (1 - \rho) c_{t-1} + \epsilon_t + \eta_t. \end{aligned}$$

El consumo responde solamente al shock permanente ϵ_t y la productividad a ambos shocks, de modo que el mapeo de (ϵ_t, η_t) a (u_t^c, u_t^a) es un sistema lineal 2×2 invertible. Un VAR estructural con restricciones de largo plazo à la Blanchard y Quah (1989), que identifica al shock con efecto permanente sobre ambas variables, recupera correctamente ϵ_t y η_t y sus impulso-respuesta.

El segundo caso es el de *ausencia de señal*, cuando $\sigma_\nu \rightarrow \infty$, y los consumidores observan solamente la productividad a_t . Como esta sigue un *random walk*, la mejor estimación del nivel de productividad de largo plazo es a_t mismo, lo cual implica $c_t = a_t$. Ambas variables comparten una única innovación común u_t , y el sistema colapsa a

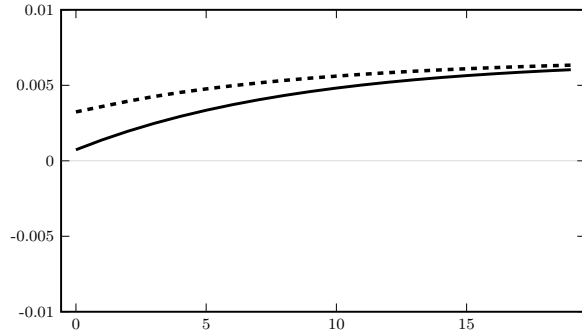
$$c_t = c_{t-1} + u_t, \quad a_t = a_{t-1} + u_t.$$

No es posible recuperar los shocks individuales ϵ_t y η_t a partir de la única innovación u_t . Sin embargo, la situación es cualitativamente distinta al caso general: la descomposición permanente-transitorio carece de relevancia operativa, ya que los consumidores mismos no disponen de información para separar los componentes.

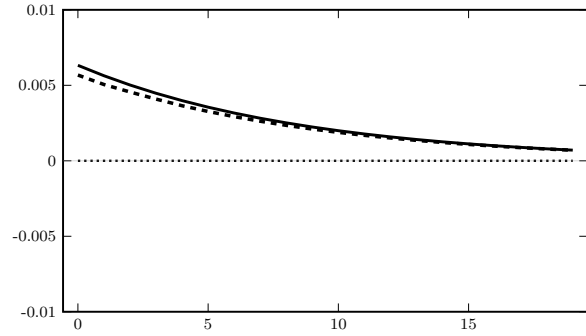
Fuera de estos dos casos polares, la señal es parcialmente informativa ($0 < \sigma_\nu < \infty$), la representación VAR de forma reducida es no-invertible, y un enfoque de VAR estructural no puede recuperar los shocks. Más aún, incluso la identificación parcial falla. La Proposición 1 del apéndice online de Blanchard, L'Huillier y Lorenzoni (2013) demuestra que, independientemente de si el econometrista observa (c_t, a_t) o incluso (c_t, a_t, s_t) , el impulso-respuesta del consumo a *cualquier* shock identificado mediante un VAR estructural es permanente y constante, o bien nulo. La intuición es directa. Como el consumo es un *random walk* condicional en la información de los agentes, y el econometrista tiene menos información, el consumo también es un *random walk* desde la perspectiva del econometrista. Un shock identificado es una combinación lineal de observables corrientes y pasados, de modo que la respuesta esperada del consumo a cualquier horizonte k es idéntica a la respuesta de

impacto. En particular, un VAR estructural con restricciones de largo plazo atribuiría al shock permanente identificado un impulso-respuesta plano sobre el consumo, sin la acumulación gradual que el verdadero shock ϵ_t genera, y el shock transitorio identificado tendría efecto nulo sobre el consumo.

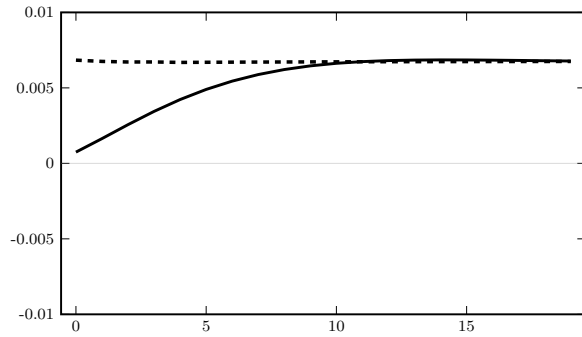
La Figura 2 ilustra este punto. Simulando $T = 100\,000$ observaciones del modelo estructural, se estima un VECM con identificación de Blanchard-Quah, y se comparan los impulso-respuesta acumulados estimados (línea discontinua) contra los verdaderos (línea sólida). El shock transitorio y el de ruido se grafican conjuntamente (línea punteada para el shock de ruido).



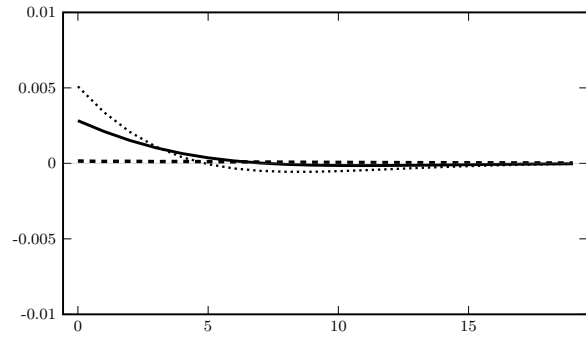
(A) Productividad: shock permanente.



(B) Productividad: shocks transitorio y ruido.



(C) Consumo: shock permanente.



(D) Consumo: shocks transitorio y ruido.

FIGURA 2. Impulso-respuesta estimados vs. verdaderos

Inciso 9. Lea detenidamente la sección 2.4 del paper. Deberá estimar el modelo usando el Kalman filter como se explicó en clase y replicar la Tabla 2 usando datos hasta 2019 (para evitar el período de Covid). Preste atención a cómo inicializar el filtro, porque el modelo, al tener una raíz unitaria, no es estacionario. Luego replique la Tabla 3. Deberá leer en detalle el apéndice del paper.

Solución 9. Se estima el modelo mediante máxima verosimilitud usando el filtro de Kalman. El estado no observado incluye una raíz unitaria, por lo que se inicializa el filtro con la técnica de difusa exacta. Los datos consisten en diferencias logarítmicas trimestrales de productividad y consumo per cápita, obtenidos de FRED para el período 1970:Q1–2019:Q4 ($T = 200$), extendiendo la muestra original del paper pero evitando el período de pandemia.

El Cuadro 1 presenta la estimación del modelo restringido ($\rho_x = \rho_z = \rho$) para distintos valores de ρ fijados en una grilla. La verosimilitud se maximiza respecto de σ_u y σ_ν . El máximo global se alcanza en $\rho = 0.89$, consistente con el paper.

CUADRO 1. Estimación por máxima verosimilitud: modelo benchmark

	ρ	σ_u	σ_ϵ	σ_η	σ_ν	ML
1.	0.00	0.0067	0.0067	0.0000	0.0089	-3×10^{12}
2.	0.25	0.0358	0.0269	0.0179	0.0000	851.1
3.	0.50	0.0373	0.0187	0.0264	0.0561	922.4
4.	0.70	0.0106	0.0032	0.0089	0.0028	1224.9
5.	0.80	0.0087	0.0017	0.0077	0.0067	1308.4
6.	0.89	0.0070	0.0008	0.0066	0.0086	1376.2
7.	0.90	0.0069	0.0007	0.0066	0.0090	1379.8
8.	0.95	0.0060	0.0003	0.0059	0.0089	1387.7
9.	0.99	0.0061	0.0001	0.0060	0.0203	1351.7

El Cuadro 2 presenta la estimación del modelo no restringido, donde ρ_x y ρ_z se estiman libremente junto con las desviaciones estándar de los shocks.¹⁴ Se parte de los parámetros óptimos del modelo benchmark como valores iniciales.

CUADRO 2. Estimación por máxima verosimilitud: modelo no restringido

	Estimación	Error estándar
ρ_x	0.9500	0.0001
ρ_z	0.9500	0.0001
σ_η	0.0059	0.0001
σ_ϵ	0.0003	0.0000
σ_ν	0.0089	0.0000
ML	1387.8	

Inciso 10 (Bonus). Lea detenidamente la sección 2.5 del paper. Intente replicar las Figuras 3 y 4. A diferencia del Kalman Filter, el smoother usa toda la información en la muestra para estimar las variables no observables para cada t —el Kalman filter usa

¹⁴Los errores estándar reportados no son correctos. La computación estándar de invertir el hessiano de la log-verosimilitud negativa evaluado en el óptimo da una matriz no definida positiva (con autovalores negativos de orden 10^7), lo cual invalida los errores estándar asintóticos. Este problema numérico persiste tanto con diferencias finitas centradas como con un enfoque híbrido (gradientes exactos vía diferenciación automática y diferencias finitas para las segundas derivadas), y se debe básicamente a que la superficie de verosimilitud es extremadamente plana en la dirección $\rho_x - \rho_z$ cuando ambos parámetros son cercanos. No estoy seguro de cómo resolver este problema.

solo información disponible hasta t . Las páginas 394–397 del libro de Hamilton (1994) contiene una explicación y algoritmo para calcular el Kalman smoother.^a

^aPosterior a la fecha de emisión de la consigna, los alumnos recibimos la sugerencia del profesor de usar, en lugar del algoritmo de Hamilton, la versión del Kalman Smoother de Durbin y Koopman (2012, Capítulos 4.3–4.5).

Solución 10. Las Figuras 3 y 4 se obtienen aplicando el Kalman smoother sobre el modelo de espacio de estados del econometrista, evaluado en los parámetros de máxima verosimilitud del modelo benchmark (Cuadro 1). A diferencia del filtro de Kalman, que produce estimaciones $\hat{\alpha}_{t|t}$ usando observaciones hasta t , el smoother utiliza la muestra completa para obtener $\hat{\alpha}_{t|T}$, mejorando sustancialmente la precisión. Implementamos el algoritmo de suavizado de Durbin y Koopman (2012, Capítulos 4.3–4.5), que consta de una pasada hacia adelante (filtro de Kalman estándar) seguida de una recursión hacia atrás que combina las predicciones filtradas con la información futura.

La Figura 3a grafica la estimación suavizada del componente permanente de productividad $x_{t|T}$ (línea sólida) junto con la estimación suavizada de la percepción del consumidor $\hat{x}_{t|T}$ (línea discontinua). A frecuencias medias, el modelo identifica un ajuste gradual de las expectativas de los consumidores a la desaceleración de productividad de los años 1970 y un ajuste simétrico en sentido opuesto durante la aceleración posterior a mediados de los años 1990. La Figura 3b compara la productividad de largo plazo $x_{t+\infty|T} = (x_{t|T} - \rho x_{t-1|T})/(1 - \rho)$ con su análogo percibido por el consumidor; las discrepancias de corto plazo entre ambas series capturan los efectos de los errores de expectativas sobre la volatilidad del consumo.

La Figura 4 presenta las estimaciones suavizadas de los tres shocks estructurales, obtenidas mediante el *disturbance smoother* de Durbin y Koopman (2012). Nótese la aparente autocorrelación de las estimaciones suavizadas de ε_t (Figura 4a). Como el econometrista no sabe a qué trimestre atribuir un cambio permanente observado en productividad, los valores suavizados de trimestres consecutivos tienden a estar altamente correlacionados. Esta autocorrelación no implica un rechazo del supuesto de shocks i.i.d., sino que refleja la información limitada del econometrista.

Inciso 11 (Super extra bonus, para valientes si tiene tiempo). Explique cómo poner el modelo DSGE de la sección 3 del paper, una vez linealizado, en el formato del modelo general representado por las ecuaciones (9), (10) y (14).

Solución 11. El marco general separa el modelo en tres bloques: la dinámica exógena (9)–(10), que gobierna estados no observables y las señales que los agentes sí observan, y las condiciones de equilibrio (14), escritas exclusivamente en función de las variables endógenas Y_t y las señales observables S_t . La estructura del mapeo es idéntica a la del modelo simple de la sección 1: el proceso de TFP y la señal ruidosa se mantienen tal cual, y los shocks adicionales del DSGE (tecnología específica de inversión, markups, política monetaria, gasto fiscal) son directamente observables por los agentes.

Comencemos identificando los vectores del modelo. El DSGE tiene $q = 8$ shocks estructurales, todos i.i.d. mutuamente independientes con varianza unitaria (las desviaciones estándar se absorben en B),

$$V_t = \begin{bmatrix} \epsilon_t & \eta_t & \nu_t & \varepsilon_{d,t} & \varepsilon_{p,t} & \varepsilon_{w,t} & \varepsilon_{q,t} & \varepsilon_{g,t} \end{bmatrix}'_{8 \times 1},$$

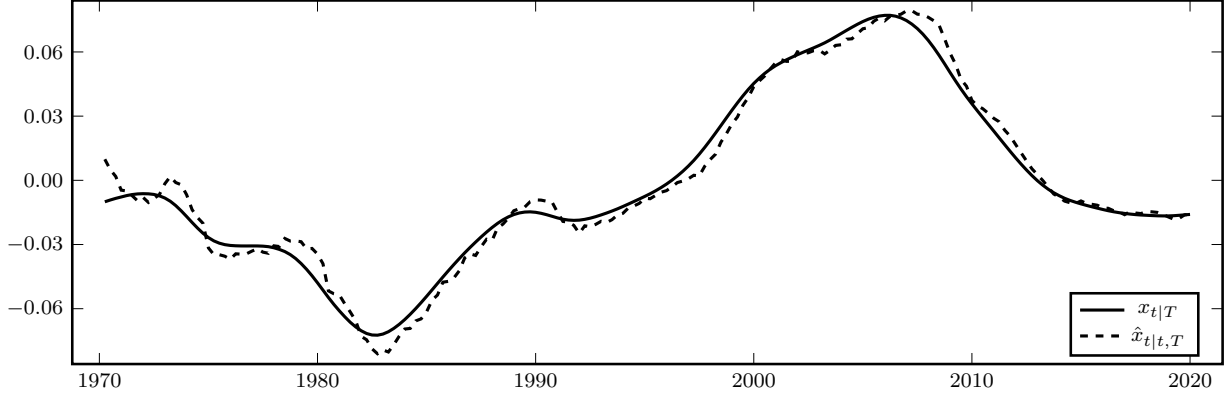
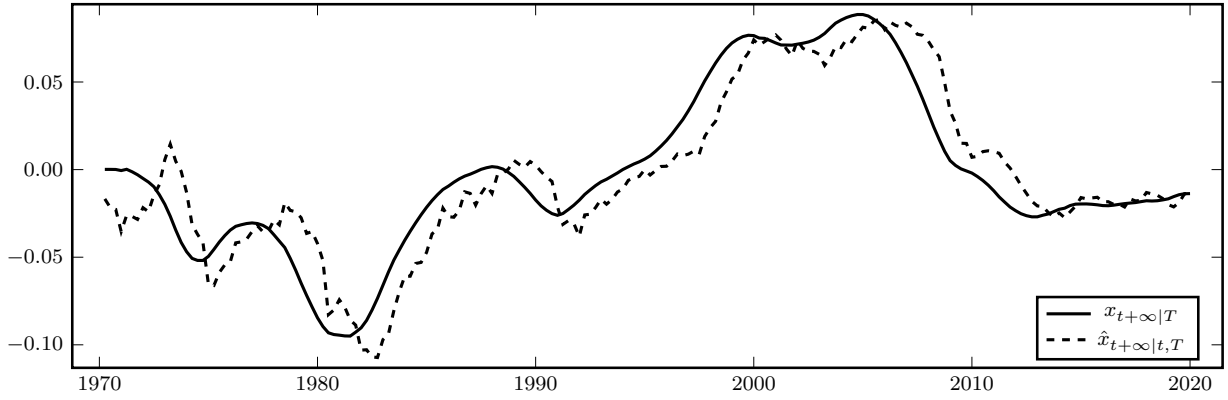
(A) Componente permanente de productividad: $x_{t|T}$ vs. $\hat{x}_{t|t,T}$.(B) Productividad de largo plazo: $x_{t+\infty|T}$ vs. $\hat{x}_{t+\infty|t,T}$.

FIGURA 3. Estimaciones suavizadas de la productividad

donde ϵ_t es el shock permanente de TFP, η_t el transitorio, ν_t el ruido, $\varepsilon_{d,t}$ el shock de tecnología específica de inversión, $\varepsilon_{p,t}$ y $\varepsilon_{w,t}$ las innovaciones de markup de precios y salarios, $\varepsilon_{q,t}$ el shock monetario y $\varepsilon_{g,t}$ el fiscal.

Los estados exógenos incluyen los tres componentes de TFP del modelo simple más los procesos exógenos adicionales. Los procesos de markup son ARMA(1,1), con $m_{p,t} = \rho_p m_{p,t-1} + \sigma_p(\varepsilon_{p,t} - \psi_p \varepsilon_{p,t-1})$. Para escribirlos en forma VAR(1) se introduce un estado auxiliar $\tilde{\varepsilon}_{p,t} := \varepsilon_{p,t}$ que almacena la innovación corriente para el término MA del período siguiente (análogamente para salarios). Esto da un total de $n = 10$ estados,

$$X_t = \begin{bmatrix} x_t & x_{t-1} & z_t & d_t & m_{p,t} & \tilde{\varepsilon}_{p,t} & m_{w,t} & \tilde{\varepsilon}_{w,t} & q_t & g_t \end{bmatrix}'_{10 \times 1}.$$

Los agentes observan la productividad realizada $a_t = x_t + z_t$, la señal ruidosa $s_t = x_t + \nu_t$, y, crucialmente, todos los shocks no-TFP de forma directa. El problema de extracción de señal aplica *solo* a la descomposición de TFP, de modo que el vector de observables es

$$S_t = \begin{bmatrix} a_t & s_t & d_t & m_{p,t} & m_{w,t} & q_t & g_t \end{bmatrix}'_{7 \times 1}.$$

Las 14 variables endógenas de la log-linealización del apéndice online son $\hat{c}_t$, $\hat{i}_t$, $\hat{y}_t$, $\hat{n}_t$, $\hat{k}_t$, $\hat{\hat{k}}_t$, $\hat{u}_t$, $\hat{\lambda}_t$, $\hat{\phi}_t$, $\hat{r}_t^k$, $\hat{w}_t$, π_t , m_t (costo marginal) y r_t , donde los sombreros denotan variables

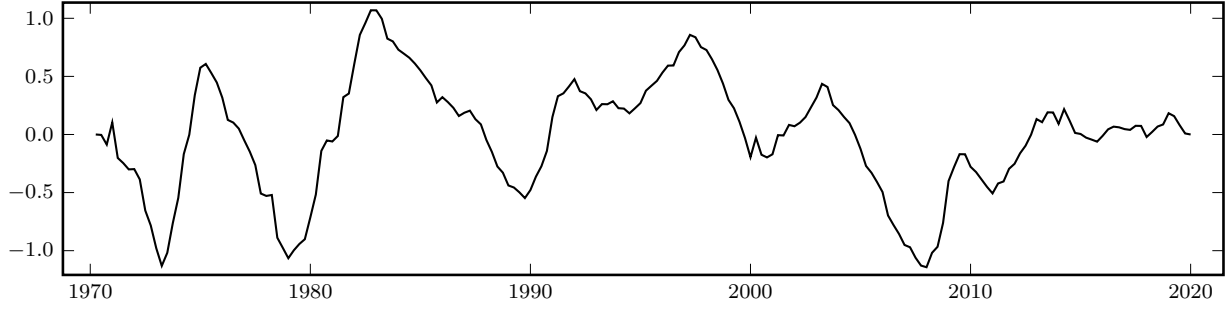
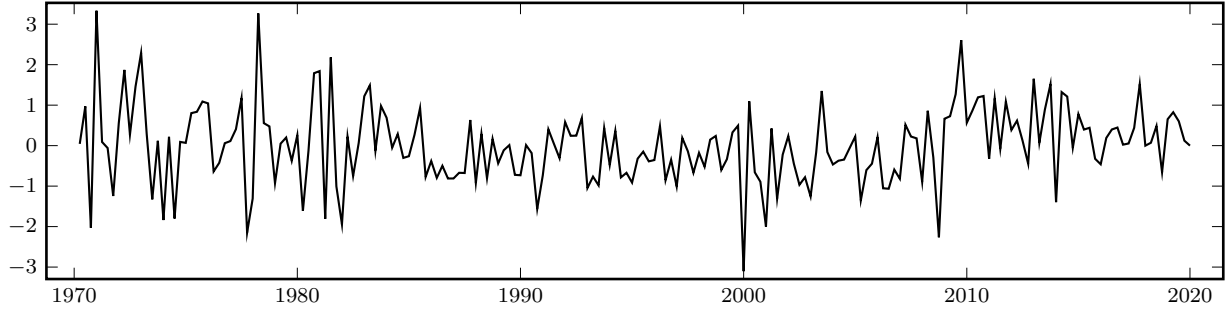
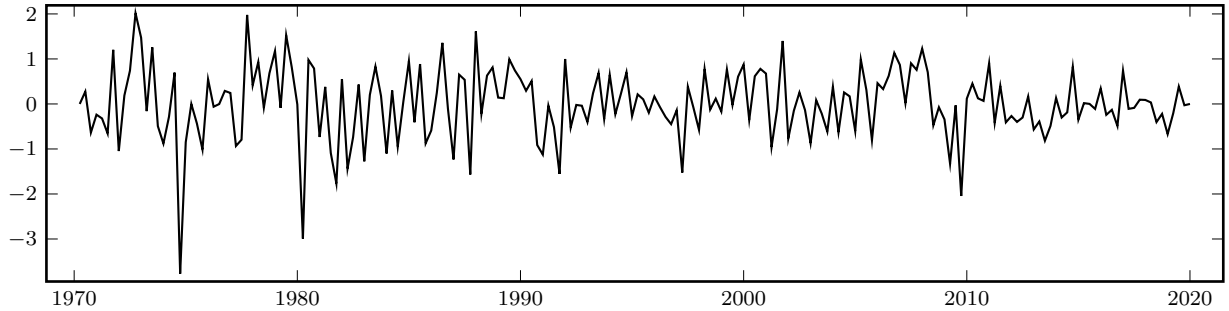
(A) Shock permanente de productividad ε_t .(B) Shock transitorio η_t .(C) Ruido ν_t .

FIGURA 4. Estimaciones suavizadas de los shocks estructurales

detrended por A_t . Para manejar los términos en $\Delta a_t = a_t - a_{t-1}$ (que requieren a_{t-1} , ausente de la ecuación (14)), se agrega una variable auxiliar endógena a_t con la identidad $a_t = S_t^{(1)}$, de modo que $\Delta a_t = a_t - a_{t-1}$ involucra Y_t e Y_{t-1} . Esto da un total de $p = 15$ variables endógenas,

$$Y_t = \begin{bmatrix} \hat{c}_t & \hat{i}_t & \hat{y}_t & n_t & \hat{k}_t & \hat{k}_t & u_t & \hat{\lambda}_t & \hat{\phi}_t & r_t^k & \hat{w}_t & \pi_t & m_t & r_t & a_t \end{bmatrix}'.$$

Construyamos ahora las matrices de transición exógena. Las leyes de movimiento de cada componente de X_t determinan A y B fila por fila. El bloque superior-izquierdo 3×3 de A

replica exactamente la matriz de transición (12) del Inciso 4.¹⁵

$$A_{10 \times 10} = \begin{bmatrix} 1+\rho & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_p & -\sigma_p \psi_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_w & -\sigma_w \psi_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_g \end{bmatrix},$$

$$B_{10 \times 8} = \begin{bmatrix} (1-\rho)\sigma_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^{1/2}\sigma_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_g \end{bmatrix}.$$

La matriz de covarianzas de los shocks es $Q = I_8$.

Pasemos a las matrices de observación. El bloque superior-izquierdo 2×3 de C replica las matrices (13); las filas restantes simplemente seleccionan los procesos directamente observables de X_t ,

$$C_{7 \times 10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{7 \times 8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La única contribución contemporánea de un shock a las observables es el ruido ν_t en la ecuación de señal.

Resta escribir las 15 ecuaciones log-linealizadas en la forma (14),

$$F E_t[Y_{t+1}] + G Y_t + H Y_{t-1} + M S_t + N E_t[S_{t+1}] = 0,$$

y determinar las matrices F , G , H (15×15) y M , N (15×7). La propiedad estructural clave es que X_t entra en las condiciones de equilibrio *solo* a través de S_t , porque los agentes no observan X_t directamente. El crecimiento de TFP $\Delta a_t = a_t - a_{t-1}$ involucra la variable auxiliar $a_t \in Y_t$ y su rezago $a_{t-1} \in Y_{t-1}$, contribuyendo a G y H ; análogamente, $E_t[\Delta a_{t+1}] =$

¹⁵Para B se adopta la convención $Q = I_q$ (shocks estandarizados), de modo que las desviaciones estándar se absorben en B . Los autores reparametrizan $\sigma_\epsilon = (1 - \rho)\sigma_u$ y $\sigma_\eta = \rho^{1/2}\sigma_u$, donde $\sigma_u^2 = \text{var}(\Delta a_t)$. Esto satisface automáticamente la restricción de martingala (4).

$E_t[S_{t+1}^{(1)}] - a_t$ contribuye a G y N . Los procesos restantes ($d_t, m_{p,t}, m_{w,t}, q_t, g_t$) pertenecen todos a S_t y entran a las ecuaciones exclusivamente a través de M .

A continuación reproducimos las 14 ecuaciones log-linealizadas del apéndice online (ecs. 39–51 y 29) más la identidad auxiliar $a_t = S_t^{(1)}$, numerándolas según el orden de las filas de las matrices que construiremos. Para abreviar, definimos los coeficientes compuestos

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{h\beta\Gamma}{(\Gamma - h\beta)(\Gamma - h)}, & \varphi_2 &= \frac{\Gamma^2 + h^2\beta}{(\Gamma - h\beta)(\Gamma - h)}, & \varphi_3 &= \frac{h\Gamma}{(\Gamma - h\beta)(\Gamma - h)}, \\ \gamma_1 &= (1 - \delta)\beta\Gamma^{-1}, & \gamma_2 &= 1 - \gamma_1, \\ \delta_1 &= (1 - \delta)\Gamma^{-1}, & \delta_2 &= 1 - \delta_1, \\ \bar{\omega} &= \frac{1}{1+\beta}, & \tilde{\omega} &= \frac{\beta}{1+\beta}, \\ c_y &= C/Y, & i_y &= I/Y, & r_y &= R^k K/(PY).\end{aligned}$$

La utilidad marginal del consumo (ec. 39 del apéndice online) da

$$\hat{\lambda}_t = \varphi_1 E_t[\hat{c}_{t+1}] - \varphi_2 \hat{c}_t + \varphi_3 \hat{c}_{t-1} + \varphi_1 E_t[\Delta a_{t+1}] - \varphi_3 \Delta a_t, \quad (29)$$

y la ecuación de Euler del consumo (ec. 40),

$$\hat{\lambda}_t = r_t + E_t[\hat{\lambda}_{t+1} - \Delta a_{t+1} - \pi_{t+1}]. \quad (30)$$

La condición de Tobin (ec. 41) es

$$\hat{\phi}_t = \gamma_1 E_t[\hat{\phi}_{t+1} - \Delta a_{t+1}] + \gamma_2 E_t[\hat{\lambda}_{t+1} - \Delta a_{t+1} + r_{t+1}^k], \quad (31)$$

mientras que la Euler de inversión (ec. 42) toma la forma

$$\hat{\lambda}_t = \hat{\phi}_t + d_t - \chi\Gamma^2(\hat{i}_t - \hat{i}_{t-1} + \Delta a_t) + \beta\chi\Gamma^2 E_t[\hat{i}_{t+1} - \hat{i}_t + \Delta a_{t+1}]. \quad (32)$$

La condición de utilización del capital (ec. 43) es

$$r_t^k = \xi u_t, \quad (33)$$

el costo marginal (ec. 44),

$$m_t = \alpha r_t^k + (1 - \alpha) \hat{w}_t, \quad (34)$$

el ratio capital-trabajo (ec. 45),

$$r_t^k = \hat{w}_t - \hat{k}_t + n_t, \quad (35)$$

y los servicios de capital (ec. 46),

$$\hat{k}_t = u_t + \hat{k}_{t-1} - \Delta a_t. \quad (36)$$

La ley de acumulación de capital (ec. 47) es

$$\hat{k}_t = \delta_1(\hat{k}_{t-1} - \Delta a_t) + \delta_2(d_t + \hat{i}_t), \quad (37)$$

la función de producción (ec. 48),

$$\hat{y}_t = \alpha \hat{k}_t + (1 - \alpha) n_t, \quad (38)$$

y la restricción de recursos (ec. 49),

$$(1 - \psi) \hat{y}_t = c_y \hat{c}_t + i_y \hat{i}_t + r_y u_t + g_t. \quad (39)$$

La curva de Phillips neo-keynesiana (ec. 50), con $\kappa = (1 - \theta\beta)(1 - \theta)/\theta$, es

$$\pi_t = \beta E_t[\pi_{t+1}] + \kappa m_t + \kappa m_{p,t}, \quad (40)$$

y la curva de Phillips de salarios (ec. 51), con $\kappa_w = \frac{(1-\theta_w\beta)(1-\theta_w)}{\theta_w(1+\beta)(1+\zeta(1+1/\mu_w))}$,

$$\hat{w}_t = \bar{\omega} \hat{w}_{t-1} + \tilde{\omega} E_t[\hat{w}_{t+1}] - \bar{\omega}(\pi_t + \Delta a_t) + \tilde{\omega} E_t[\pi_{t+1} + \Delta a_{t+1}] - \kappa_w(\hat{w}_t - \zeta n_t + \hat{\lambda}_t) + \kappa_w m_{w,t}. \quad (41)$$

La regla de Taylor (ec. 29) es

$$r_t = \rho_r r_{t-1} + (1 - \rho_r)(\gamma_\pi \pi_t + \gamma_y \hat{y}_t) + q_t, \quad (42)$$

y la identidad auxiliar cierra el sistema,

$$a_t = S_t^{(1)}. \quad (43)$$

Reescribiendo cada ecuación en la forma $0 = (\text{lado derecho}) - (\text{lado izquierdo})$, expandiendo $\Delta a_t = Y_t^{(15)} - Y_{t-1}^{(15)}$ y $E_t[\Delta a_{t+1}] = E_t[S_{t+1}^{(1)}] - Y_t^{(15)}$, se obtienen las matrices F , G , H (15×15) y M , N (15×7). Las filas corresponden a las ecuaciones (29)–(43); las columnas de F , G , H corresponden a los 15 elementos de Y_t en orden $(\hat{c}, \hat{i}, \hat{y}, n, \hat{\bar{k}}, \hat{k}, u, \hat{\lambda}, \hat{\phi}, r^k, \hat{w}, \pi, m, r, a)$; las de M y N corresponden a los 7 elementos de S_t (a, s, d, m_p, m_w, q, g).

[illegible]

$$H_{15 \times 15} = \begin{bmatrix} \varphi_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi\Gamma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi\Gamma^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\omega} & 0 & 0 & 0 & \bar{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{15 \times 7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_{15 \times 7} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta\chi\Gamma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las dimensiones resultantes se resumen en el Cuadro 3. La matriz F es dispersa (*sparse*), dado que solo las ecuaciones forward-looking (29)–(32), (40) y (41) tienen filas no nulas. La matriz H también es dispersa, con filas no nulas solo en las ecuaciones con rezagos endógenos (29), (32), (36), (37), (41) y (42). La matriz N tiene entradas no nulas solo en su primera columna ($E_t[a_{t+1}]$), y en las ecuaciones que contienen $E_t[\Delta a_{t+1}]$ ((29)–(32) y (41)); los demás procesos exógenos entran exclusivamente a través de M . Nótese que la convención de signos adoptada (0 = lado derecho – lado izquierdo) asigna -1 a la variable “definida” de cada ecuación en G .

Identificadas las matrices $(A, B, C, D, F, G, H, M, N)$, el procedimiento de los Incisos 5–6 aplica directamente. Se resuelve $FP^2 + GP + H = 0$ por descomposición QZ , se obtienen Q y R de (17)–(18), y se estima $X_{t|t}$ mediante el filtro de Kalman sobre el espacio de estados (A, B, C, D) . En la práctica, el paquete de replicación de los autores explota el Lema 2 (modelo equivalente de información completa) para evitar resolver el filtro de Kalman del agente dentro de la solución del DSGE. Reemplaza X_t por $X_{t|t}$ y V_t por las innovaciones

CUADRO 3. Dimensiones del modelo en forma general.

Objeto	Dimensión	Valor
Estados exógenos X_t	n	10
Shocks estructurales V_t	q	8
Observables del agente S_t	m	7
Variables endógenas Y_t	p	15
Transición A	$n \times n$	10×10
Carga de shocks B	$n \times q$	10×8
Observación C	$m \times n$	7×10
Shock-a-observación D	$m \times q$	7×8
Matrices F, G, H	$p \times p$	15×15
Matrices M, N	$p \times m$	15×7

de S_t , y estima un modelo de información completa con shocks correlacionados sujeto a la restricción $\Sigma_S = LL'$.

REFERENCIAS

- Blanchard, Olivier J. y Charles M. Kahn (1980). “The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations”. En: *Econometrica* 48.5, págs. 1305-1311. ISSN: 0012-9682. DOI: 10.2307/1912186. JSTOR: 1912186. URL: <https://www.jstor.org/stable/1912186> (visitado 18-03-2026).
- Blanchard, Olivier J., Jean-Paul L’Huillier y Guido Lorenzoni (dic. de 2013). “News, Noise, and Fluctuations: An Empirical Exploration”. En: *American Economic Review* 103.7, págs. 3045-3070. ISSN: 0002-8282. DOI: 10.1257/aer.103.7.3045. URL: <https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/aer.103.7.3045> (visitado 30-01-2026).
- Blanchard, Olivier J. y Danny Quah (1989). “The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances”. En: *The American Economic Review* 79.4, págs. 655-673. ISSN: 0002-8282. JSTOR: 1827924. URL: <https://www.jstor.org/stable/1827924> (visitado 10-03-2026).
- Cochrane, John H. (18 de dic. de 2024). *Bob Hall and Consumption*. URL: <https://www.grumpy-economist.com/p/bob-hall-and-consumption> (visitado 09-03-2026).
- DeJong, David Neil y Chetan Dave (2011). *Structural Macroeconometrics*. Second edition. Princeton Oxford: Princeton University Press. 1 pág. ISBN: 978-0-691-15287-5 978-1-4008-4050-2.
- Durbin, James y Siem Jan Koopman (2012). *Time Series Analysis by State Space Methods*. 2nd ed. Oxford Statistical Science Ser v.38. Oxford: Oxford University Press, Incorporated. 1 pág. ISBN: 978-0-19-964117-8 978-0-19-162718-7.
- Hall, Robert E. (1978). “Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence”. En: *Journal of Political Economy* 86.6, págs. 971-987. ISSN: 0022-3808. JSTOR: 1840393. URL: <https://www.jstor.org/stable/1840393> (visitado 08-03-2026).
- Hamilton, James D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton (N.J.): Princeton University Press. ISBN: 978-0-691-04289-3.

- Hevia, Constantino (jul. de 2025). “Numerical Approximation of DSGE Models”. Buenos Aires, Argentina.
- Klein, Paul (1 de sep. de 2000). “Using the Generalized Schur Form to Solve a Multivariate Linear Rational Expectations Model”. En: *Journal of Economic Dynamics and Control* 24.10, págs. 1405-1423. ISSN: 0165-1889. DOI: 10.1016/S0165-1889(99)00045-7. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165188999000457> (visitado 18-03-2026).
- Sims, Christopher A. (1 de oct. de 2002). “Solving Linear Rational Expectations Models”. En: *Computational Economics* 20.1, págs. 1-20. ISSN: 1572-9974. DOI: 10.1023/A:1020517101123. URL: <https://doi.org/10.1023/A:1020517101123> (visitado 18-03-2026).
- Uhlig, Harald (1995). *A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily*. Discussion Paper / Institute for Empirical Macroeconomics 101. Federal Reserve Bank of Minneapolis. DOI: None. URL: <https://ideas.repec.org/p/fip/fedmem/101.html>.