

LEMA DE HOTELLING

FELIPE. I. TAPPATA

El lema de Hotelling es una relación entre las derivadas parciales de la función de beneficios y la demanda de insumos y oferta de bien final. Lo demostramos de dos maneras, una más simple y directa, y otra que demuestra mejor la intuición y el contenido económico detrás del lema. La discusión se basa en la de Varian (1992, pág. 43).

Teorema 1 (Lema de Hotelling). *Sea $y(p, w_1, \dots, w_n)$ la oferta de la firma del bien final y $x_i(p, w_1, \dots, w_n)$ la demanda del insumo i . Entonces*

$$y(p, w_1, \dots, w_n) = \frac{\partial \pi}{\partial p},$$
$$x_i(p, w_1, \dots, w_n) = -\frac{\partial \pi}{\partial w_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde $\pi(p, w_1, \dots, w_n)$ es la función de beneficios.

Primero hacemos una demostración más corta pero no tan intuitiva.

Demostración. Sea $(p^*, w_1^*, \dots, w_n^*)$ un vector de precios arbitrario y llamemos y^* y x_i^* a la cantidad de bien final y del insumo i óptimas en $(p^*, w_1^*, \dots, w_n^*)$. Definimos una función

$$g(p, w_1, \dots, w_n) = \pi(p, w_1, \dots, w_n) - (py^* - w_1x_1^* - \dots - w_nx_n^*).$$

Es decir, $g(\cdot)$ es la función de beneficios menos los beneficios correspondientes a elegir y^* y x_i^* . Obviamente la función de beneficios es al menos tan grande como los beneficios de elegir y^* y x_i^* , que no son necesariamente óptimos. Por lo tanto la función $g(\cdot)$ es mayor o igual a cero. Además $g(p^*, w_1^*, \dots, w_n^*) = 0$ porque en ese punto la función de beneficios es igual a los beneficios de elegir y^* y x_i^* , por definición. El punto $(p^*, w_1^*, \dots, w_n^*)$ es por lo tanto un mínimo interior para la función $g(\cdot)$ y las condiciones de primer orden implican

$$\frac{\partial g}{\partial p} = \frac{\partial \pi}{\partial p} - y^* = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial w_i} = \frac{\partial \pi}{\partial w_i} + x_i^* = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Esto vale para todo $(p^*, w_1^*, \dots, w_n^*)$ y por lo tanto queda demostrado el lema. $\square$

Hacemos ahora una demostración más intuitiva en un escenario más simple, donde hay un solo insumo.

Demostración. Consideremos una firma que produce un bien final y con un insumo x y función de producción $f(x)$. Los precios son p y w . La condición de primer orden para maximización de beneficios es

$$p \frac{df(x)}{dx} - w = 0. \quad (1)$$

La función de demanda, $x(p, w)$ debe satisfacer esta ecuación en cada (p, w) . La función de beneficios es

$$\pi(p, w) = pf(x(p, w)) - wx(p, w).$$

Diferenciando respecto a p obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial p} &= p \frac{\partial f(x(p, w))}{\partial x} \frac{\partial x(p, w)}{\partial p} + f(x(p, w)) - w \frac{\partial x(p, w)}{\partial p} \\ &= \left[p \frac{\partial f(x(p, w))}{\partial x} - w \right] \frac{\partial x(p, w)}{\partial p} + y(p, w). \end{aligned}$$

Reemplazando con la ecuación (1) obtenemos

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = y(p, w).$$

De manera similar, diferenciando la función de beneficios respecto a w produce

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial w} &= p \frac{\partial f(x(p, w))}{\partial x} \frac{\partial x(p, w)}{\partial w} - x(p, w) - w \frac{\partial x(p, w)}{\partial w} \\ &= \left[p \frac{\partial f(x(p, w))}{\partial x} - w \right] \frac{\partial x(p, w)}{\partial w} - x(p, w). \end{aligned}$$

Reemplazando con la ecuación (1) obtenemos

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} = -x(p, w).$$

Queda demostrado el lema. □

Este segundo argumento exhibe mejor la intuición económica detrás del lema de Hotelling. Cuando el precio del bien final sube por una cantidad chica, hay dos efectos. Primero, hay un efecto directo: debido al aumento del precio, la firma obtendrá más beneficios, incluso si continúa produciendo el mismo nivel de producción. Este efecto es representado por el término $y(p, w)$ en la derivada de la función de beneficios respecto al precio del bien final.

Pero además, hay un efecto indirecto: el aumento del precio del bien final induce a la firma cambiar su nivel de producción en una cantidad chica. Este efecto es representado por el término

$$\left[p \frac{\partial f(x(p, w))}{\partial x} - w \right] \frac{\partial x(p, w)}{\partial p}$$

en la derivada de la función de beneficios respecto al precio del bien final. Pero el cambio en los beneficios resultante de cualquier cambio infinitesimal en la producción debe ser cero, ya que estamos en el plan de producción que maximiza los beneficios.¹ Por lo tanto, el impacto del efecto indirecto es cero, y nos quedamos solo con el efecto directo.

REFERENCIAS

Varian, Hal R. (1992). *Microeconomic Analysis*. 3. ed. New York, NY: Norton. 506 págs. ISBN: 978-0-393-95735-8 978-0-393-96026-6.

¹Esto es lo que nos indica la ecuación (1).